研究会報告

有限時間間隔の場の理論
—場の理論におけるシュレーディンガー描像の因果律について—

慶応大・理工　野本和正
福田礼次郎

1．概要

場の理論における因果律の歴史は長く，色々な側面を持っている．特に，それは量子力学の非局所的な性質と深く関わっていて観測問題との関連でも興味深い．

因果律の場の量子論的記述（微視的因果律）は，しばしばハイゼンベルグ描像で次の様に表現される[1)]．

$$[\hat{\phi}^{(H)}(x),\hat{\phi}^{(H)}(y)]=0 \qquad \text{if} \quad (x-y)^2<0 \tag{1.1}$$

$$x=(x^0,\boldsymbol{x}), \qquad x^2\equiv x^\mu x_\mu \equiv {x_0}^2-\boldsymbol{x}^2$$

ここで，$\phi(x)$は場の演算子であり，それがボーズ場（フェルミオン場）ならば[,]は交換子（反交換子）である．つまり(1.1)は「互いに空間的な2点にある場の演算子は可換である」ということを表している．これは，自由な場のみでなく，局所的な相互作用が存在する場合にも成り立つ．また，このことは局所場の理論の最も本質的な要請のひとつにもなっている．量子力学では，可換な物理量は，互いに影響を及ぼさずに観測できるという原理が存在するので(1.1)は，空間的に離れた2点の観測は互いに影響を及ぼし合わないということを示している．つまり，いかなる場の擾乱（信号）も光速を超えて伝わらないということである．しかし，これは抽象的な演算子の関係であって，いかに信号が伝わるかなどということは判りにくい．

そこで，別の描像—シュレーディンガー描像—で因果律がいかに表現されるか調べた．

はじめに，初期状態の波動関数が時空の原点に局在したデルタ関数で表されるような一粒子の非相対論的・相対論的な量子拡散（quantum diffusion）について調べた．その結果，非相対論的には局在した次の瞬間には粒子は無限遠方まで場所に依らない確率で拡散してしまい，光速を超えて粒子が運動し得るということがわかる．しかし，非相対論では，光速を無限大と近似しているので当然の結果である．相対論的には，その状況はやや改善され，空間的である領域のうち十分遠方である位置に拡散する確率は殆どゼロになる．しかし，相対論にさえも光円錐の外側のコンプトン波長程度の領域には無視できない確率で粒

子を見い出すことができることが，簡単な計算からわかる．したがって，この場合も因果律が破れているといえる．この原因については，現在検討中であるが，一つは初期にデルタ関数の波動関数を用意することが非局所的な操作であることに起因していると考えられる．この問題を避けるために，次に局所的な操作により場に擾乱を与え，それが時間とともに場の中をどのように伝わるかを調べた．

先ず，自由な場において時空の原点に擾乱を与えるようなラグランジアンとして次のモデルを考えた．

$$\mathscr{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi(x)) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) + J\delta^4(x)\phi(x) \tag{1.2}$$

ここで，$\phi(x)$ はボーズ場（質量 m のスカラーボゾン場）の変数である．時刻 $t<0$ で任意の初期状態を用意して(1.2)の系で時間発展させ $t>0$ での波動（汎）関数を $\Psi_F[\phi]$ とする．そこで，終状態の空間的領域の密度行列 $\rho[\tilde{\phi}_S, \phi_S]$ を次の様に定義する．

$$\rho[\tilde{\phi}_S, \phi_S] = \int [\mathrm{d}\phi_t]\,\Psi_F{}^*[\tilde{\phi}]\,\Psi_F[\phi]\Big|_{\tilde{\phi}_t=\phi_t} \tag{1.3}$$
$$[\mathrm{d}\phi_t] \equiv \prod_{x\in\{x|x^2>0\}} \mathrm{d}\phi(x)$$

ϕ_t：時空の原点（擾乱が加わった点）に対して時間的な領域にある場の変数．

ϕ_S：時空の原点（擾乱が加わった点）に対して空間的な領域にある場の変数．

このとき「$\rho[\tilde{\phi}_S, \phi_S]$ は，J に依らない」ということを示すことができる．このことは，場に擾乱が加わった点に対し，空間的な領域の状態はその影響を全く受けないということであり，完全に因果律を満していることがわかる．相互作用が存在しても，局所的であるならば同様のことを示すことができる．

つまり，シュレーディンガー描像での因果律は「場の擾乱が加わった点に対して空間的な点における密度行列は場の擾乱の影響を受けない」と表現される．

さらに，シュレーディンガー描像の因果律の表現からハイゼンベルグの因果律の表現を導くことができる．このことからシュレーディンガー描像の因果律の表現は，ハイゼンベルグ描像のそれと少なくとも等価，又はそれよりも広い概念を含んでいると考えられる．

なお，本文中では自然単位系 $c = \hbar = 1$ を用いる．

2．1粒子の系における自由場中の量子拡散（quantum diffusion）

2.1 非相対論的量子拡散

自由粒子のハミルトニアンは，非相対論的には

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{2.1}$$

である．初期 $(t=0)$ の波動関数を

$$\Psi_I(\boldsymbol{x}) = \delta^3(\boldsymbol{x}) \tag{2.2}$$

とすると，終状態 $(t = T)$ の波動関数は

$$\Psi_F(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} - i\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}T} = \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi i T}\right)^3}\,\mathrm{e}^{i\frac{m}{2T}\boldsymbol{x}^2} \tag{2.3}$$

となる．よって，終状態において点 $\boldsymbol{x}$ に粒子を見い出す確率密度は,

$$|\Psi_F(\boldsymbol{x})|^2 = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^3 \tag{2.4}$$

となり，初期状態を用意した次の瞬間には，全空間で粒子を見い出す確率が等しくなる．このことは，初期に粒子が存在した点に対し，空間的な領域にも粒子が存在することである．つまり，粒子は光速を超えて移動したことになり明らかに因果律を破っている．しかし，これは非相対論的な場合は光速を無限大と近似しているためであると考えられる．

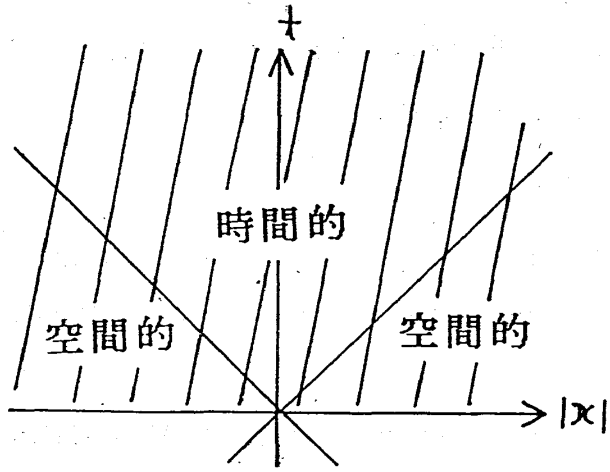


図2.1

そこで，次に相対論的な量子拡散を考え，光速を有限にしたために因果律が回復するかどうかみる．

2.2 相対論的量子拡散

相対論的な自由粒子のハミルトニアンは

$$H = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \tag{2.5}$$

である．前節と同様にして，初期 $(t = 0)$ の波動関数を

$$\Psi_I(\boldsymbol{x}) = \delta^3(\boldsymbol{x}) \tag{2.6}$$

とすると，終状態 $(t = T)$ の波動関数は

$$\Psi_F(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} - i\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}} \tag{2.7}$$

$$= -2\frac{\partial}{\partial T}\Delta^{(+)}(x) \tag{2.8}$$

$$x = (T,\ \boldsymbol{x})$$

ここで，$\Delta^{(+)}(x)$は場の量子論で用いられる不変デルタ関数の1つであり次の様に定義される．

$$\Delta^{(+)}(x) \equiv \int \frac{d^3 \boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{e^{-i\omega_p T}}{2i\omega_p} \right] e^{i p x} \tag{2.9}$$

$$\omega_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$$

この $\boldsymbol{p}$-積分を陽に実行すると，結果は次の様になる．

$$\Delta^{(+)}(x) = -\frac{1}{4\pi} \left[\delta(x^2) - \theta(x^2) \frac{m}{2\sqrt{x^2}} \left\{ J_1(m\sqrt{x^2}) - iN_1(m\sqrt{x^2}) \right\} \right.$$
$$\left. + \theta(-x^2) \frac{im}{\pi\sqrt{-x^2}} K_1(m\sqrt{-x^2}) \right] \tag{2.10}$$

$$x^2 = x_0{}^2 - \boldsymbol{x}^2$$

ここで，J_1：1階の第1種 Bessel 関数

N_1：1階の第2種 Bessel 関数

K_1：1階の変形された（modified）Bessel 関数

で，通常慣習的に用いられている表記を用いた[2)]．

また，

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

(2.10)式の右辺の第1項，第2項の存在はそれぞれは光円錐上，時間的領域の波動関数なので因果律と矛盾していない．しかし，第3項は空間的領域の波動関数であるので，相対論的に考えた場合でも空間的領域に粒子が伝わり得るということになる．やはり，因果律を破っているのである．しかし，空間的領域の波動関数を評価すると

$$\frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{m}{\sqrt{-x^2}} K_1(m\sqrt{-x^2}) \right\} \sim \frac{mT}{\sqrt{-x^2}} e^{-m\sqrt{-x^2}} \qquad (x^2 \to \infty) \tag{2.12}$$

となり，空間的な領域では，位置の座標の原点からの距離が増すにつれ粒子の存在確率が指数関数的に減少することがわかる．従って，波動関数は光円錐の外面にほぼコンプトン波長程度（$\sim \frac{1}{m}$）浸み出しているといえる．この原因のひとつとして，波動関数がデルタ関数であるような空間的に局在した状態をつくる操作が非局所的であることが考えられる．

なぜ，(2.2)や(2.6)の状態が非局所的操作からつくられるかは，以下の様にして示すことができる．

いま空間のある点 $\boldsymbol{x}$ に粒子を一つつくる生成演算子を $a^{+}(\boldsymbol{x})$ とすると，真空を $|0\rangle$ と

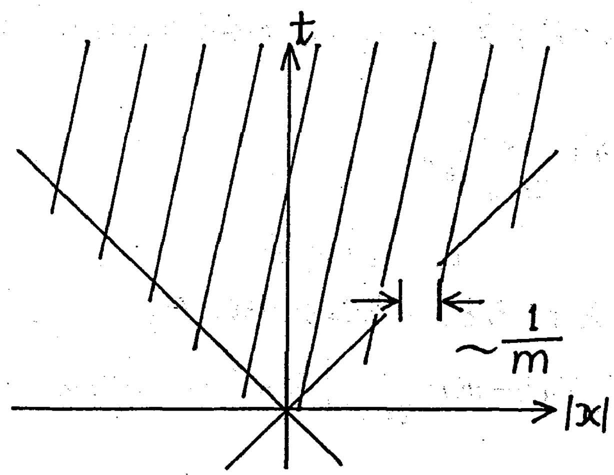


図2.2

して(2.2)や(2.6)の状態は

$$a^{+}(\boldsymbol{x})|0\rangle \tag{2.13}$$

と表わすことができる．運動量空間での生成消滅演算子を $a^{+}(\boldsymbol{p})$, $a(\boldsymbol{p})$ とすると

$$a^{(+)}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{V}\sum_{p}a^{(+)}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{px}} \tag{2.14}$$

と表すことができるだろう．また，局所演算子である場の演算子 $\phi(\boldsymbol{x})$ とその共役な運動量 $\Pi(\boldsymbol{x})$ は，それぞれ次の様にフーリエ展開できる．

$$\phi(\boldsymbol{x})=\sum_{p}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{p}}}[a(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{px}}+a^{+}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{px}}] \tag{2.15}$$

$$\Pi(\boldsymbol{x})=\sum_{p}\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\omega_{p}}{2V}}[a(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{px}}-a^{+}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{px}}] \tag{2.16}$$

$$\omega_{p}=\sqrt{\boldsymbol{p}^{2}+m^{2}}$$

従って，局所演算子を用いると $a^{+}(\boldsymbol{x})$ は次の様に表される．

$$a^{+}(\boldsymbol{x})=\int\left[\sum_{p}\sqrt{\frac{\omega_{p}}{2V}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\right]\phi(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^{3}\boldsymbol{y}-i\int\left[\sum_{p}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{p}}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\right]\Pi(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^{3}\boldsymbol{y} \tag{2.17}$$

このことから，$a^{+}(\boldsymbol{x})$ は非局所的演算子であることがわかる．

理論が局所性を要請しているときは，ラグランジアン密度はある1点の局所変数（演算子）で書かれる．そのためラグランジアンより求めたハミルトニアンで真空を時間発展させて，ある状態をつくるときは，決して(2.13)のような非局所的操作から生成される状態をつくることができない．

つまり，(2.13)のような状態を考えること自体が局所性と矛盾して因果律を破るような結果を生じた可能性がある．

この問題を回避するために，次章では局所的なラグランジアンにより場のある一点（例えば，時空の原点）に擾乱を与え，その擾乱が時間と共にいかに伝播するかを考える．

3．シュレーディンガー描像での因果律の表現

3.1 自由なスカラーボゾン場が外場と線形に結合した系の時間発展核（time evolution kernel）

シュレーディンガー描像での時間発展核（time evolution kernel）（以後，単に kernel と呼ぶ）は次の様に定義される．

$$K[\phi^b,t^b;\phi^a,t^a] \equiv \langle\phi^b|\exp[-iHT]|\phi^a\rangle \tag{3.1}$$

ここで，$T = t^b - t^a$ (3.2)

$|\phi\rangle$ は場の演算子 $\hat{\phi}(\boldsymbol{x})$ の固有値 $\phi(\boldsymbol{x})$ の固有状態，すなわち

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{x})|\phi^a\rangle = \phi^a(\boldsymbol{x})|\phi^a\rangle \tag{3.3}$$

また，H は全ハミルトニアンを表している．

先ず，簡単のために次のラグランジアンで表されるような外場 $J(\boldsymbol{x},t)$ がスカラーボゾン場 $\phi(\boldsymbol{x})$ と線形に結合した系を考える．

$$L = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi(\boldsymbol{x}))(\partial^\mu\phi(\boldsymbol{x})) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(\boldsymbol{x}) + J(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x})\right\} \tag{3.4}$$

（後に，$J(\boldsymbol{x},t) = J(x) = J\delta^4(x)$ として，時空の原点に擾乱を与えるラグランジアンとする．）

ラグランジアンを $\phi(\boldsymbol{x})$ と $J(\boldsymbol{x},\ t)$ のフーリエ成分で書き直す．そこで，$\phi(\boldsymbol{x})$ を次の様にフーリエ展開する．

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\phi_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x,n_y,n_z) \qquad n_x,\ n_y,\ n_z = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

$$\phi_{\boldsymbol{k}} = \phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{R}} + i\phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{I}} \qquad \phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{R}},\ \phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{I}}：\text{実数} \tag{3.6}$$

ここで，$\phi(\boldsymbol{x})$ のエルミート性より

$$\phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{R}} = \phi_{-\boldsymbol{k}}^{\mathrm{R}}, \qquad \phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{I}} = -\phi_{-\boldsymbol{k}}^{\mathrm{I}} \tag{3.7}$$

の関係がある．同様にして $J(\boldsymbol{x},\ t)$ も

$$J(\boldsymbol{x},\ t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}J_{\boldsymbol{k}}(t)\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \tag{3.8}$$

とフーリエ展開する．以上の関係を用いると(3.4)は次の様に表される．

$$L = \sum_{\boldsymbol{k},\sigma}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}_{\boldsymbol{k}}^{\sigma2} - \frac{1}{2}\omega_{\boldsymbol{k}}^2\phi_{\boldsymbol{k}}^{\sigma2} + J_{\boldsymbol{k}}^{\sigma}(t)\phi_{\boldsymbol{k}}^{\sigma}\right) \tag{3.9}$$

$$\sigma = (\mathrm{R,I}), \qquad \omega_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}, \qquad \dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

このとき，$\phi_{\boldsymbol{k}}$ に共役な運動量は

$$\Pi_{\boldsymbol{k}}^{\sigma} = \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}_{\boldsymbol{k}}} = \dot{\phi}_{\boldsymbol{k}}^{\sigma} = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\phi_{\boldsymbol{k}}^{\sigma}} \tag{3.10}$$

となり，従ってハミルトニアンは

$$H=\sum_{k,\sigma}{}' \Pi_k{}^{\sigma}\dot{\phi}_k{}^{\sigma}-L$$

$$=\sum_{k,\sigma}{}'\left\{\frac{1}{2}\Pi_k{}^{\sigma 2}+\frac{1}{2}\omega_k{}^2\phi_k{}^{\sigma 2}-J_k{}^{\sigma}(t)\phi_k{}^{\sigma}\right\} \tag{3.11}$$

となる．ここで，$\sum_k{}'$ は $\boldsymbol{k}$-空間の半分にわたる和を表す．

Kernel は，次の汎関数積分（経路積分・path integral）によって求めることができる．[3]

$$K[\phi^b,t^b;\phi^a,t^a]=\int[\mathrm{d}\phi]\mathrm{e}^{i\int_{t^a}^{t^b}L(t)\mathrm{d}t} \tag{3.12}$$

ここで，ラグランジアンの引数は演算子 $\phi_k{}^{\sigma}$ から $\phi_k{}^{\sigma}$ の固有値 $\phi_k{}^{\sigma}(t)$ に置き換わり $L(t)=L[\phi_k{}^{\sigma}(t),\ \dot{\phi}_k{}^{\sigma}(t)]$ とした．また，積分は固有値 $\phi_k{}^{\sigma}(t)$ により

$$[\mathrm{d}\phi]=\prod_k{}'\prod_{t^a<t<t^b}\mathrm{d}\phi_k{}^R(t)\mathrm{d}\phi_k{}^I(t)$$

（ここで，$\prod_k{}'$ は $\boldsymbol{k}$-空間の半分にわたる積を表す．）

と行う．但し，時間の両端では

$$\phi_k{}^{\sigma}(t^a)\equiv\phi_k{}^{a\sigma},\qquad \phi_k{}^{\sigma}(t^b)\equiv\phi_k{}^{b\sigma}$$

と ϕ の値を固定する．

その結果は，次の様になることが知られている[4]．

$$K[\phi^b,t^b;\phi^a,t^a]$$

$$\begin{aligned}=\prod_k\sqrt{\frac{\omega_k}{\pi i\sin\omega_k T}}\exp\sum_{k,\sigma}{}'\Big[&i\omega_k\cot\omega_k T(\phi_k{}^{b\sigma 2}+\phi_k{}^{a\sigma 2})\\ &-i\frac{2\omega_k}{\sin\omega_k T}\phi_k{}^{b\sigma}\phi_k{}^{a\sigma}\\ &+\phi_k{}^{b\sigma}\int_{t^a}^{t^b}\frac{\sin\omega_k(t-t^a)}{\sin\omega_k T}2iJ_k{}^{\sigma}(t)\mathrm{d}t\\ &+\phi_k{}^{a\sigma}\int_{t^a}^{t^a}\frac{\sin\omega_k(t^b-t)}{\sin\omega_k T}2iJ_k{}^{\sigma}(t)\mathrm{d}t\\ &+\frac{i}{2}\int_{t^a}^{t^b}\int_{t^a}^{t^b}\mathrm{d}t\mathrm{d}t'2iJ_k{}^{\sigma}(t)G_k(t,t')2iJ_k{}^{\sigma}(t')\Big]\end{aligned} \tag{3.14}$$

ここで，$G_k(t,t')$ は有限時間間隔のグリーン関数と呼ばれるもので次式で表される．

$$\begin{aligned}G_k(t,t')\equiv\ &\theta(t'-t)\frac{\sin\omega_k(t'-t^a)\sin\omega_k(t^b-t)}{2\omega_k\sin\omega_k T}\\ &+\theta(t-t')\frac{\sin\omega_k(t-t^a)\sin\omega_k(t^b-t')}{2\omega_k\sin\omega_k T}\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\equiv\theta(t'-t)G_k{}^{(+)}(t,\ t')+\theta(t-t')G_k{}^{(-)}(t,\ t') \tag{3.16}$$

さらに，逆フーリエ変換

$$\phi_k=\frac{1}{\sqrt{V}}\int\phi(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x},\qquad J_k(t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\int J(\boldsymbol{x},t)\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{3.17}$$

を行うと，(3.14)の kernel は次の様になる．

$$
\begin{aligned}
&K[\phi^b,t^b;\phi^a,t^a]\\
&=\prod_k\sqrt{\frac{\omega_k}{\pi i\sin\omega_k T}}\exp\Big[i\int\int\phi^b(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi^b(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{y}\\
&\qquad+i\int\int\phi^a(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi^a(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{y}\\
&\qquad+i\int\int\phi^b(\boldsymbol{x})\Delta^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},T)\phi^a(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{y}\\
&\qquad+\int_t\int\phi^b(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y};y^0,t^a)2iJ(y)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^4y\\
&\qquad+\int_t\int\phi^a(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y};t^b,y^0)2iJ(y)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^4y\\
&\qquad+\frac{i}{2}\int_t\int_t 2iJ(x)G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y};x^0,y^0)2iJ(y)\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\Big]
\end{aligned}\tag{3.18}
$$

ここで，

$$\int_t\mathrm{d}^4x\equiv\int_{t^a}^{t^b}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\tag{3.19}$$

$$F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\equiv\sum_k\frac{\omega_k}{2V}\cot\omega_k T\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\tag{3.20}$$

$$\Delta^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},T)\equiv\sum_k\frac{-\omega_k}{V\sin\omega_k T}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\tag{3.21}$$

$$H(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y};y^0,t^a)\equiv\sum_k\frac{\sin\omega_k(y^0-t^a)}{2V\sin\omega_k T}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\tag{3.22}$$

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y};x^0,y^0)\equiv\sum_k\frac{G_k(x^0,y^0)}{2V}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\tag{3.23}$$

以上が，(3.4)のラグランジアンで表される系の一般的な kernel の表式である．
ここで

$$J(x)=J\delta^4(x)\tag{3.24}$$

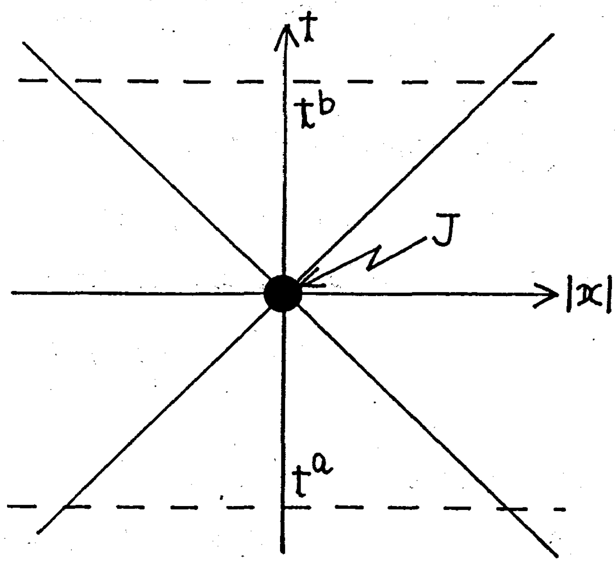


図3. 1

と仮定して，外場が時空の原点のみで場に擾乱を与えるものにする．

一般の $J(x)$ に関しては，(3.24)の重ね合わせ

$$J(x)=\int J(y)\delta^4(y-x)\mathrm{d}^4y \tag{3.25}$$

で表すことができるので，(3.24)の場合について調べれば十分である．

このとき，kernel は次の様になる．

$$\begin{aligned}K[\phi^b,t^b;\phi^a,t^a]&\\=\sqrt{\frac{\omega_k}{\pi i\sin\omega_k T}}\exp\Big[&i\iint\phi^b(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi^b(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{y}\\&+i\iint\phi^a(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi^a(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{y}\\&+i\iint\phi^b(\boldsymbol{x})\Delta^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},T)\phi^a(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{y}\\&+2iJ\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\phi^b(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x};0,t^a)\\&+2iJ\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\phi^a(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x};t^b,0)\\&+\frac{i}{2}(2iJ)G(0;0,0)(2iJ)\Big]\end{aligned}\tag{3.26}$$

ここで，

$$H(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y};x^0,y^0)=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\Delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},x^0-y^0)\Delta^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},T) \tag{3.27}$$

但し，$\Delta(x)$ は不変デルタ関数と呼ばれるもので次式で定義されている．

$$\Delta(x)\equiv\Delta(\boldsymbol{x},x^0)\equiv\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{-\sin\omega_k x^0}{V\omega_k}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \tag{3.28}$$

特に，$x^2<0$ のとき $\Delta(x)=0$

これらの関係に注意すれば，最終的に次の形に整理することができる．

$$\begin{aligned}K[\phi^b,t^b;\phi^a,t^a]&\\=\prod_k\sqrt{\frac{\omega_k}{\pi i\sin\omega_k T}}\exp\Big[&i\iint\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{y}\Big\{\phi^b(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi^b(\boldsymbol{y})\\&+\phi^a(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi^a(\boldsymbol{y})\\&+(\phi^b+J\Delta(\boldsymbol{x},t^b))\Delta^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},T)(\phi^a(\boldsymbol{y})+J\Delta(\boldsymbol{y},-t^a))\\&-\frac{1}{2}J\Delta(\boldsymbol{x},t^b)\Delta^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},T)J\Delta(\boldsymbol{y},-t^a)\Big\}\Big]\end{aligned}\tag{3.29}$$

3.2　自由なスカラーボゾン場における因果律の表現

時刻 $t=t^a$ に系の波動（汎）関数が $\langle\phi^a|\Psi_I\rangle\equiv\Psi_I[\phi^a]$ で与えられると時刻 $t=t^b(>t^a)$ における波動関数 $\Psi_F[\phi^b]$ は次式により与えられる．

$$\Psi_F[\phi^b] = \int [\mathrm{d}\phi^a] K[\phi^b, t^b; \phi^a, t^a] \Psi_I[\phi^a] \tag{3.30}$$

このとき，$t = t^b$ における密度行列 $\rho[\tilde{\phi}^b; \phi^b]$ は次の様になる．

$$\begin{aligned}\rho[\tilde{\phi}^b,\ \phi^b] &= \Psi_F^*[\tilde{\phi}^b] \Psi_F[\phi^b] \\ &= \int\!\!\int [\mathrm{d}\tilde{\phi}^a][\mathrm{d}\phi^a] K^*[\tilde{\phi}^b, t^b; \tilde{\phi}^a, t^a] K[\phi^b, t^b; \phi^a, t^a] \\ &\quad \times \Psi_I^*[\tilde{\phi}^a] \Psi_I[\phi^a]\end{aligned} \tag{3.31}$$

この密度行列により，$t = t^b$ における任意の演算子 $A(\phi(\boldsymbol{x}), \Pi(\boldsymbol{x}))$ の期待値 $\langle A \rangle$ は次の様に求められる．

$$\langle A \rangle = \int [\mathrm{d}\phi^b] A\left(\phi^b(\boldsymbol{x}),\ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \phi^b(\boldsymbol{x})}\right) \rho[\tilde{\phi}^b, \phi] \Big|_{\tilde{\phi}^b = \phi^b} \tag{3.32}$$

ところで，我々の興味は(3.24)で与えた外場の影響が空間的領域に伝わるかどうかである．このことを見るために空間的領域の密度行列を次の様に定義する．

$$\rho[\tilde{\phi}_s{}^b, \phi_s{}^b] = \int [\mathrm{d}\phi_t{}^b] \rho[\tilde{\phi}^b, \phi^b] \Big|_{\tilde{\phi}_t{}^b = \phi_t{}^b} \tag{3.33}$$

ここで，ϕ_s, ϕ_t はそれぞれ外場が加わった点（つまり，時空の原点）に対して空間的，時間的領域にある場の変数を表わしている（図3.2）．(3.33)は時間的領域については行列の表示を揃えて積分してしまったもの（つまり，部分トレースをとったもの）であり，時間的領域の情報は全て失なわれていて空間的領域の状態のみを表すものである．(3.31)及び(3.33)より空間的領域の密度行列は次の様に書ける．

$$\begin{aligned}\rho[\tilde{\phi}_s{}^b,\ \phi_s{}^b] &= \int\!\!\int [\mathrm{d}\tilde{\phi}^a][\mathrm{d}\phi^a] \Psi_I^*[\tilde{\phi}^a] \Psi_I[\phi^a] \\ &\quad \times \underbrace{\int [\mathrm{d}\phi_t{}^b] K^*[\tilde{\phi}^b, t^b; \tilde{\phi}^a, t^a] K[\phi^b, t^b; \phi^a, t^a] \Big|_{\tilde{\phi}_t{}^b = \phi_t{}^b}}_{\sim\sim}\end{aligned} \tag{3.34}$$

このとき$\sim\sim$部分は次の様である．

$$\sim\sim = \prod_k \frac{\omega_k}{\pi \sin \omega_k T}$$

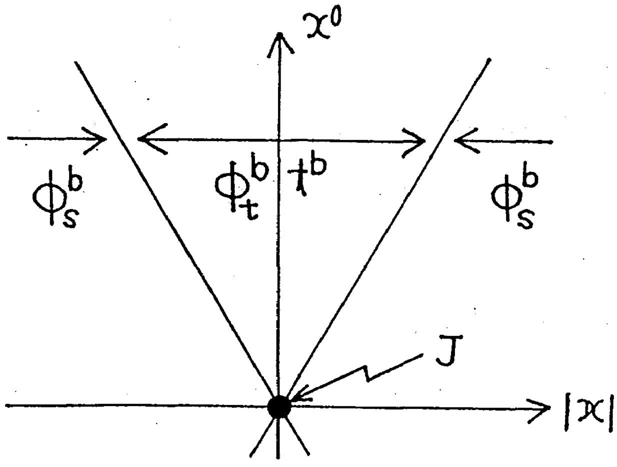


図3.2

$$\times\int[\mathrm{d}\phi_t{}^b]\exp\Big[i\phi_t{}^b\Big\{2F(\phi_s{}^b-\tilde{\phi}_s{}^b)+\Delta^{-1}(T)(\phi^a-\tilde{\phi}^a)\Big\}$$
$$+iJ\Big\{\Delta(t^b)\Delta^{-1}(T)(\phi^a-\tilde{\phi}^a)+(\phi_s{}^b-\tilde{\phi}_s{}^b)\Delta^{-1}(T)\Delta(-t^a)\Big\}$$
$$+i(\phi^a F\phi^a-\tilde{\phi}^a F\tilde{\phi}^a)$$
$$+i(\phi_s{}^b F\phi_s{}^b-\tilde{\phi}_s{}^b F\tilde{\phi}_s{}^b)$$
$$+i(\phi_s{}^b\Delta^{-1}(T)\phi^a-\tilde{\phi}_s{}^b\Delta^{-1}(T)\tilde{\phi}^a)\Big] \tag{3.35}$$

ここで，ϕ を空間座標を指標にもつベクトル

$$\phi=(\phi(\boldsymbol{x}_1),\ \phi(\boldsymbol{x}_2),\ \phi(\boldsymbol{x}_3),\ \cdots) \tag{3.36}$$

とし，ϕ_s, ϕ_t はそれぞれ上のベクトルのうちの空間的，時間的領域の成分とした．また F, $\Delta^{-1}(T)$ は行列要素 $\{F\}_{xy}=F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, $\{\Delta^{-1}(T)\}_{xy}=\Delta^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},T)$を持つ行列とした．例えば，

$$\phi_s{}^b F\phi_s{}^b=\int_s\int_s \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{y}\,\phi^b(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi^b(\boldsymbol{y})$$

ここで，$\int_s \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$ は空間的領域 $\boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{x}\,|\,t^{b2}-\boldsymbol{x}^2<0\}$ にわたる積分を表す．

$$\Delta(t^b)\Delta^{-1}(T)\phi=\int\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{y}\,\Delta(\boldsymbol{x},t^b)\Delta^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},T)\phi(\boldsymbol{y})$$

などということを意味している．

$\phi_t{}^b$ について積分すると，(3.35)は次の様になる．

$$\sim\!\sim\!\sim=\prod_k\frac{\omega_k}{\pi\sin\omega_k T}$$
$$\prod_{x\in\{\text{時間的領域}\}}\delta(2F(\phi_s{}^b-\tilde{\phi}_s{}^b)-\Delta^{-1}(T)(\phi^a-\tilde{\phi}^a))$$
$$\exp\Big[iJ\Big\{\Delta(t^b)(-2F(\phi_s{}^b-\tilde{\phi}_s{}^b))+(\phi_s{}^b-\tilde{\phi}_s{}^b)\Delta^{-1}(T)\Delta(-t^a)\Big\}$$
$$+i(\phi^a F\phi^a-\tilde{\phi}^a F\tilde{\phi}^a)+i(\phi_s{}^b F\phi_s{}^b-\tilde{\phi}_s{}^b F\tilde{\phi}_s{}^b)$$
$$+i(\phi_s{}^b\Delta^{-1}(T)\phi^a-\tilde{\phi}_s{}^b\Delta^{-1}(T)\tilde{\phi}^a)\Big] \tag{3.37}$$

もし，空間的領域に外場の擾乱が伝わらないならば $\rho[\tilde{\phi}_s{}^b,\phi_s{}^b]$ は J に依らない，すなわち(3.37)の中の J の係数は恒等的にゼロであるはずである．

実際に計算してみると

$$iJ\ \text{の係数}=-\int_s \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^b}\Delta(\boldsymbol{x},t^b) \tag{3.38}$$

となり，$\Delta(\boldsymbol{x},t^b)$ の引数 $\boldsymbol{x}$ は常に空間的領域のものであるので，(3.28)より

$$J\ \text{の係数}=0 \tag{3.39}$$

となる．

従って，$t=t^a$ にある初期状態に依らずに

$\rho[\tilde{\phi}_s{}^b,\phi_s{}^b]=J$ に依らない

を示すことができた．この意味においてシュレーディンガー描像では外場の擾乱がその与えられた点から見て空間的領域に伝わらないということができる．（すなわち，密度行列のレベルで因果律は成立している．）

3.3 自己相互作用のあるスカラーボゾン場における因果律の表現

自己相互作用のあるスカラーボゾン場に時空の原点で外場により擾乱を与えることを考える．このときの系のラグランジアンは次式で表わされるとする．

$$L=\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\{\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi(\boldsymbol{x}))(\partial^\mu\phi(\boldsymbol{x}))-\frac{1}{2}m\phi^2(\boldsymbol{x})+J\delta^4(x)\phi(\boldsymbol{x})\right\}-V[\phi] \tag{3.40}$$

ここで，$t^a<0$ で初期状態を用意して $t^b>0$ まで時間発展させ，時刻 t^b の状態による $\phi(\boldsymbol{x})$ の期待値に J の影響がいかに現れるかを調べる．相互作用がある系において時間発展した状態で，ある演算子の期待値を求める場合は，次に挙げる期待値の摂動論を用いると便利である．

3.3.1 期待値の摂動論

初期状態を $|\mathrm{I}\rangle$ とすれば終状態 $|\mathrm{F}\rangle$ は次の様に表される．

$$|\mathrm{F}\rangle=U(t^b,t^a)|\mathrm{I}\rangle$$

$$U(t^b,t^a)\equiv\exp(-i\int_{t^a}^{t^b}H(t)\mathrm{d}t) \tag{3.41}$$

よって終状態における $\phi(\boldsymbol{x})$ の任意関数 $A(\phi(\boldsymbol{x}))$ の期待値は

$$\langle\mathrm{F}|A(\phi(\boldsymbol{x}))|\mathrm{F}\rangle=\langle\mathrm{I}|U^+(t^b,t^a)A(\phi(\boldsymbol{x}))U(t^b,t^a)|\mathrm{I}\rangle \tag{3.42}$$

ここで，系のハミルトニアンを

$$H=\sum_k\hbar\,\omega_k\left(a^+(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})+\frac{1}{2}\right)+V[\phi] \tag{3.43}$$

$a^+(\boldsymbol{k})$, $a(\boldsymbol{k})$：ボゾンの生成・消滅演算子

と仮定すると，(3.42)はコヒーレント状態の表示をとることにより計算することができる．ここで，コヒーレント状態 $|\{\alpha(\boldsymbol{k})\}\rangle$ を次の様に定義する．

$$a(\boldsymbol{k})|\{\alpha(\boldsymbol{k})\}\rangle=\alpha(\boldsymbol{k})|\{\alpha(\boldsymbol{k})\}\rangle \tag{3.44}$$

$$|\{\alpha(\boldsymbol{k})\}\rangle\equiv\exp(\sum_k\alpha(\boldsymbol{k})a^+(\boldsymbol{k})|0\rangle \tag{3.45}$$

但し，$a(\boldsymbol{k})|0\rangle=0$

このコヒーレント状態は次の完全性をもつ．

$$\int\prod_k\frac{\mathrm{d}^2\alpha(\boldsymbol{k})}{\pi}\exp(-\sum_k|\alpha(\boldsymbol{k})|^2)|\{\alpha(\boldsymbol{k})\}\rangle\langle\{\alpha(\boldsymbol{k})\}|=1 \tag{3.46}$$

また，内積は

$$\langle\!\{\alpha(\boldsymbol{k})\}|\{\beta(\boldsymbol{k})\}\!\rangle = \exp(\sum_{\boldsymbol{k}}\alpha^*(\boldsymbol{k})\beta(\boldsymbol{k})) \tag{3.47}$$

となる．これらの関係を用いると，(3.42)は次の様に書き直すことができる．

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{F}|A(\phi(\boldsymbol{x}))|\mathrm{F}\rangle = &\int\prod_{\boldsymbol{k}}\frac{\mathrm{d}^2\alpha(\boldsymbol{k})}{\pi}\frac{\mathrm{d}^2\beta(\boldsymbol{k})}{\pi}\exp\Big\{-\sum_{\boldsymbol{k}}(|\alpha(\boldsymbol{k})|^2+|\beta(\boldsymbol{k})|^2)\Big\}\\ &\times\langle \mathrm{I}|\{\alpha(\boldsymbol{k})\}\!\rangle\langle\!\{\beta(\boldsymbol{k})\}|\mathrm{I}\rangle\\ &\times\underset{\sim\sim\sim}{\langle\!\{\alpha(\boldsymbol{k})\}|U^+(t^b,t^a)A(\phi(\boldsymbol{x}))U(t^b,t^a)|\{\beta(\boldsymbol{k})\}\!\rangle}\end{aligned} \tag{3.48}$$

(3.48)の$\sim\sim$部分は，次の様になる．(導出は省略する．)

$$\begin{aligned}&\langle\!\{\alpha(\boldsymbol{k})\}|U^+(t^b,t^a)A(\phi(\boldsymbol{x}))U(t^b,t^a)|\{\beta(\boldsymbol{k})\}\!\rangle/\langle\!\{\alpha(\boldsymbol{k})\}|\{\beta(\boldsymbol{k})\}\!\rangle\\ &=\exp\Big[\int_t \mathrm{d}^4x\varphi_{as}(x,t^a)\Big(\frac{\delta}{\delta\phi(x)}+\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}(x)}\Big)\\ &\quad+\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\varphi_{as}(\boldsymbol{x},t^b,t^a)\frac{\partial}{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_t\!\int_t\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\frac{\delta}{\delta\phi(x)}G(x-y)\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_t\!\int_t\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}(x)}\tilde{G}(x-y)\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}(y)}\\ &\quad+\frac{1}{2}\int\!\!\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{y}\frac{\partial}{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},0)\frac{\partial}{\partial\phi(\boldsymbol{y})}\\ &\quad+\int_t\!\int_t\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}(x)}G^{(+)}(x-y)\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\\ &\quad+\int\!\int_t\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^4y\frac{\partial}{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}G^{(+)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t^b-y^0)\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\\ &\quad+\int\!\int_t\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^4y\frac{\partial}{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}G^{(-)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t^b-y^0)\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}(y)}\Big]\\ &\quad\times\exp\Big\{-i\int_{t^a}^{t^b}V[\phi]\mathrm{d}t\Big\}\exp\Big\{i\int_{t^a}^{t^b}V[\bar{\phi}]\mathrm{d}t\Big\}A(\varphi(\boldsymbol{x}))\Big|_{\phi=\bar{\phi}=\varphi=0}\end{aligned} \tag{3.49}$$

ここで

$$\begin{aligned}\varphi_{as}(x;t^a)&\equiv\varphi_{as}(\boldsymbol{x},x^0,t^a)\\ &\equiv\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}}\Big\{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}-i(x^0-t^a)\omega_k}\beta(\boldsymbol{k})+\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}+i(x^0-t^a)\omega_k}\alpha^*(\boldsymbol{k})\Big\}\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$G(x-y)=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}}{2V\omega_k}\Big\{\mathrm{e}^{-i(x^0-y^0)\omega_k}\theta(x^0-y^0)+e^{-i(y^0-x^0)\omega_k}\theta(y^0-x^0)\Big\} \tag{3.51}$$

$$G(x-y)\equiv G^{(+)}(x-y)\theta(x^0-y^0)+G^{(-)}(x-y)\theta(y^0-x^0) \tag{3.52}$$

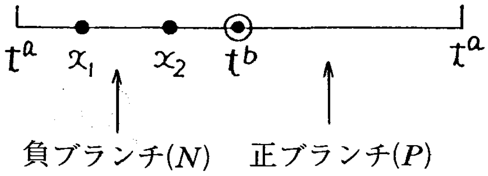
$$\tilde{G}(x-y)\equiv G^{(+)}(x-y)\theta(y^0-x^0)+G^{(-)}(x-y)\theta(x^0-y^0) \tag{3.53}$$

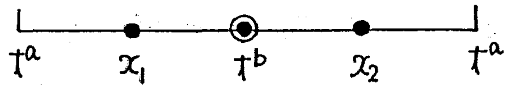
従って(3.49)を求めるためのFeynman ruleは次の様になる．

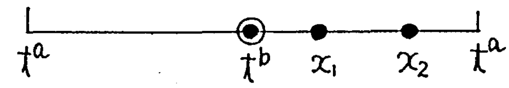
1．n次のオーダーの摂動では，正・負ブランチの上にあらゆる可能な組み合わせで $2n$コのvertexを割り当てる．但し，期待値をとるべきvertex $A(\phi(\boldsymbol{x}))$は常に時刻t^b

上にある．

例　$n=1$，A：◉，V：●







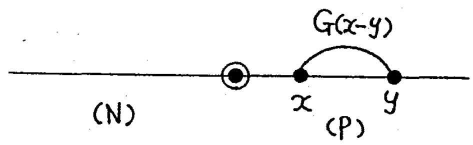
2．vertex factor をそれぞれ次の様に割り当てる．

正ブランチの上の vertex	$-iV[\phi]$
負　〃	$iV[\phi]$
時刻 t^b　〃	$A(\varphi(\boldsymbol{x}))$

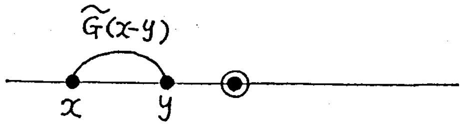
3．全てのトポロジカルに異なる連結（connected）グラフを1．で割り当てた vertex の配置に応じて描く．

4．内線には次のグリーン関数を掛ける．

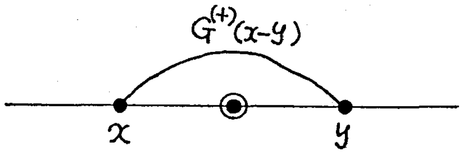
$$\phi(x)\phi(y)=G(x-y)$$



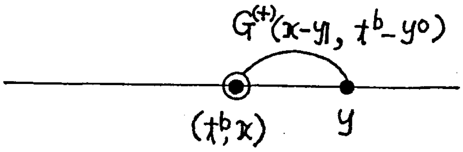
$$\bar{\phi}(x)\bar{\phi}(y)=\tilde{G}(x-y)$$



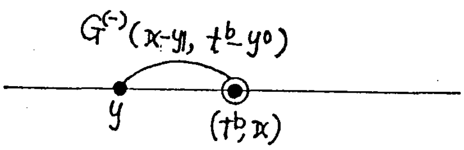
$$\bar{\phi}(x)\phi(y)=G^{(+)}(x-y)$$



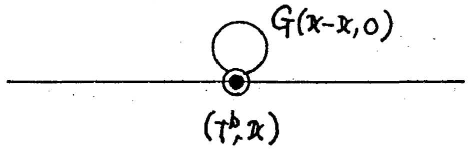
$$\varphi(\boldsymbol{x})\phi(y)=G^{(+)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t^b-y^0)$$



$$\varphi(\boldsymbol{x})\bar{\phi}(y)=G^{(-)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t^b-y^0)$$

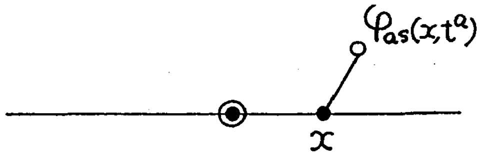


$\overline{\varphi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{y})} = G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},0)$

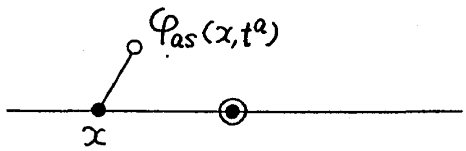


5．外線には次の因子を掛ける．

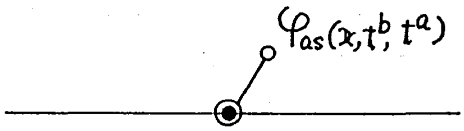
$\phi(x) \rightarrow \varphi_{as}(x, t^a)$



$\bar{\phi}(x) \rightarrow \varphi_{as}(x, t^a)$



$\varphi(\boldsymbol{x}) \rightarrow \varphi_{as}(\boldsymbol{x}, t^b, t^a)$



6．対称因子をかける．

7．全ての vertex の時空 x_i で($t^a \leq x_i^0 \leq t^b$, $\boldsymbol{x}$ の可能な範囲）にわたり積分する．

次節では，以上のルールを用いて，(3.40)の系における $\phi(\boldsymbol{x})$ の期待値を計算し，その J 依存性について議論する．

3.3.2　(3.40)の系における $\phi(\boldsymbol{x})$ の期待値と因果律

(3.40)よりハミルトニアンを計算すると，(3.48)において

$$V[\phi] = -\int J(x)\phi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} + V^I[\phi] \tag{3.54}$$

$$J(x) = J\delta^4(x)$$

としたものに相当する．恒等式

$$\exp\left[\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right]\exp\left[-Jx+V(x)\right]\Bigg|_{x=0} = \exp\left[\alpha\left(-J+\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\exp\left[V(x)\right]\Bigg|_{x=0} \tag{3.55}$$

を用いれば，相互作用を(3.54)の形に仮定したとは，(3.49)において

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \rightarrow iJ(x) + \frac{\delta}{\delta\phi(x)}$$

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}(x)} \rightarrow -iJ(x) + \frac{\delta}{\delta\bar{\phi}(x)} \tag{3.56}$$

$$V \rightarrow V^I$$

と置き換えればよい．この置き換えを行なった後，(3.49)を整理すると結局外線の部分を

$$\varphi_{as}(x,t^a) \rightarrow \varphi_{as}(x,t^a) - J\Delta_R(x) \tag{3.57}$$

$$\varphi_{as}(\boldsymbol{x},t^b,t^a) \rightarrow \varphi_{as}(\boldsymbol{x},t^b,t^a) - J\Delta(\boldsymbol{x},t^b) \tag{3.58}$$

ここで，$\Delta_R(x) \equiv \Delta(x)\theta(x^0)$

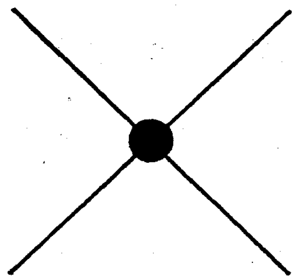
と置換し，相互作用を

$$V \rightarrow V'$$

とすればよいことがわかる．

具体的に $\phi(\boldsymbol{x})$ の期待値を計算するために相互作用を

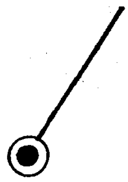
$$V[\phi] = \lambda\int \phi^4(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{3.59}$$



と仮定する．（局所相互作用）

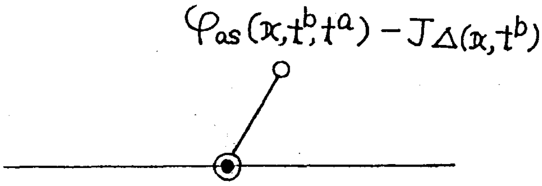
また，$\phi(\boldsymbol{x})$ の期待値を考えているので

$$A(\phi(\boldsymbol{x})) = \phi(\boldsymbol{x}) \tag{3.60}$$



である．

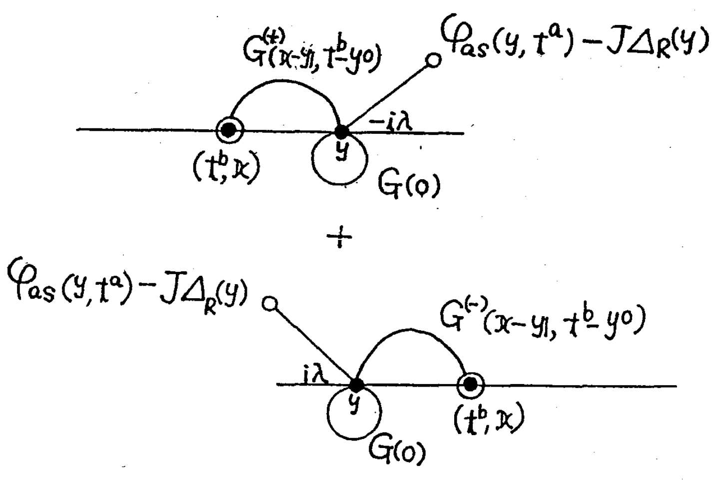
λのゼロ次は相互作用が無い場合に対応していて，そのグラフは



(3.61)

であるので，確かに J 依存性は時間的な領域にしか表れない．

λの１次のグラフのうち外線を１つしか持たないものは，



$$\propto -i\lambda G(0)\int_t \mathrm{d}^4 y\{G^{(+)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t^b-y^0)-G^{(-)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t^b-y^0)\}$$

$$\times(\varphi_{as}(y,t^a)-J\Delta_R(y))$$

$$=-i\lambda G(0)\int_t \mathrm{d}^4 y i\Delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t^b-y^0)\varphi_{as}(y,t^a)$$

$$+i\lambda G(0)\int_t \mathrm{d}^4 yJi\Delta_R(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t^b-y^0)\Delta_R(y) \tag{3.62}$$

となり，J の係数は(3.62)の様な遅延不変デルタ関数 $\Delta_R(x)$ の積の積分で表されるので，J の影響が決して空間的領域に現れることはない．さらに，λ の高次の項についても $\phi(\boldsymbol{x})$ の期待値の J 依存性は

$$\sim J\int_t\cdots\int_t \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\cdots\Delta_R(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1,t^b-x_1{}^0)\Delta_R(x_1-x_2)\cdots\Delta_R(x_{n-1}-x_n)\Delta_R(x_n)\times(\ \cdots\ ) \tag{3.63}$$

となることがわかるので λ の全てのオーダーで J の依存性は空間的領域には現れない．直観的には，J の影響は時空の中を図3.3の様に伝わっていると考えることができる．以上の結果は初期状態に全く依らないことに注意されたい．

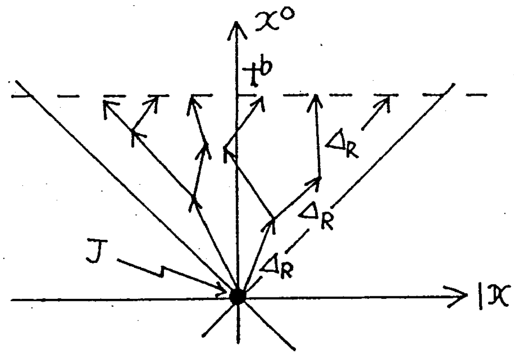


図3. 3

また，同様のことは，$\phi(\boldsymbol{x})$ の任意の関数の $A(\phi(\boldsymbol{x}))$ の期待値についても成立するので密度行列の対角成分 $\rho[\phi_s{}^b,\phi_s{}^b]$ については，そのレベルで因果律が成立しているといえる．（密度行列の非対角要素が因果律を満している，すなわち，$\rho[\phi_s{}^b,\phi_s{}^b](\phi_s{}^b\neq\phi_s{}^b)$ が J に依らないことを示すためには，さらに $\Pi(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{i}\dfrac{\delta}{\delta\phi(\boldsymbol{x})}$ の任意の関数の期待値が J に依らないことを示せばよい．が，それはまだ確かめていない．）

以上のことを示すために，相互作用の局所性を仮定したことを忘れてはならない．相互作用が非局所的なとき，例えば

$$V[\phi]=\int\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3\boldsymbol{y}\phi(\boldsymbol{x})C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi(\boldsymbol{y}) \tag{3.64}$$

のときは，$\phi(\boldsymbol{x})$ の期待値の J 依存性の一つの例は

$$J\iint_{t_a} d^4x_1 d^3\boldsymbol{y}\Delta_R(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1,\ t^b-x_1)C(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1)\Delta_R(\boldsymbol{y}_1,\ x_1) \tag{3.65}$$

となり，$\boldsymbol{x}$ が J の加わった時空の原点から空間的にあっても J の依存性は残り因果律を破ることになってしまう（図3.4）．つまり，相互作用の局所性は理論が因果律を満足するための重要な要請なのである．

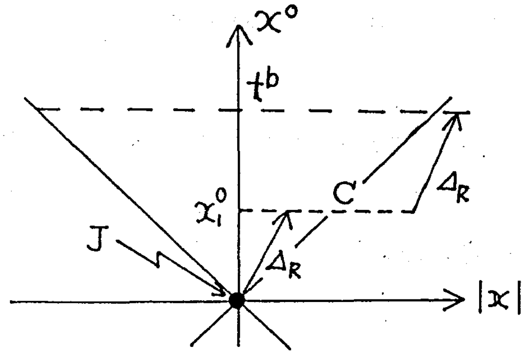


図3.4

4．シュレーディンガー描像とハイゼンベルグ描像の因果律の関係について

(3.40)の系のハミルトニアンを

$$H = H^V - J\delta^4(x)\phi(x) \tag{4.1}$$

と表す．このとき(3.41)は次の様になる．

$$|\mathrm{F}\rangle = e^{-iH^V t^b} e^{iJ\phi(0)} e^{iH^V t^a}|\mathrm{I}\rangle \tag{4.2}$$

ところで，$|\mathrm{F}\rangle$ による $\phi(\boldsymbol{x})$ の期待値は $(t^b,\boldsymbol{x})$ が時空の原点に対し空間的ならば J に依らないことは前章で示した．すなわち

$$\langle \mathrm{F}|\phi(\boldsymbol{x})|\mathrm{F}\rangle = J\text{ に依らない} \qquad \text{if} \quad t^{b2}-\boldsymbol{x}^2 < 0 \tag{4.3}$$

また，(4.2)より

$$\langle \mathrm{F}|\phi(\boldsymbol{x})|\mathrm{F}\rangle = \langle \mathrm{I}'|e^{-iJ\phi^{(H)}(0)}\phi^{(H)}(\boldsymbol{x},t^b)e^{iJ\phi^{(H)}(0)}|\mathrm{I}'\rangle \tag{4.4}$$

但し，添字 (H) はハイゼンベルグ描像の演算子を表し

$$\phi^{(H)}(\boldsymbol{x},t^b) \equiv e^{iH^V t^b}\phi(\boldsymbol{x})e^{-iH^V t^b}$$

$$\phi^{(H)}(0,0) = \phi(0)$$

と時刻0でシュレーディンガー表示と一致させた．また，$|\mathrm{I}'\rangle = e^{iH^V t^a}|\mathrm{I}\rangle$ である．公式

$$e^A B e^{-A} = B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]+\cdots$$

$$= \exp[A^X]B \tag{4.5}$$

ここで　$A^X B \equiv [A,B] \equiv AB-BA$

より

$$\langle \mathrm{F}|\phi(\boldsymbol{x})|\mathrm{F}\rangle = \langle \mathrm{I}'|\phi^{(H)}(\boldsymbol{x},t^b)+(-iJ)[\phi^{(H)}(0),\phi^{(H)}(\boldsymbol{x},t^b)] + \frac{(-iJ)^2}{2!}[\phi^{(H)}(0),[\phi^{(H)}(0),\phi^{(H)}(\boldsymbol{x},t^b)]] + \cdots\cdots|\mathrm{I}'\rangle \tag{4.6}$$

(4.3)は任意の初期状態について成立するので，(4.6)と比較すると，ただちに

$$[\phi^{(H)}(0),\phi^{(H)}(\boldsymbol{x},t^b)]=0 \qquad \text{if} \quad t^{b2}-\boldsymbol{x}^2<0$$

ということがわかる．

このようにシュレーディンガー描像からハイゼンベルグ描像の因果律の関係を導くことができた．従って

"$\rho[\phi_s{}^b,\phi_s{}^b]$ が J に依らない"

ということは

"$[\phi^{(H)}(0),\phi^{(H)}(\boldsymbol{x},t^b)]=0 \qquad \text{if} \quad t^{b2}-\boldsymbol{x}^2<0$"

と少なくとも等価であると考えられる．また，自己相互作用が無い場合は

"$\rho[\tilde{\phi}_s{}^b,\phi_s{}^b]$ が J に依らない"

ということまで示せているので，それが(1.1)よりも広い概念である可能性はあるが，それについては現在検討中である．

5．結論・議論

場の理論における，微視的因果律は互いに空間的に離れた場の変数の変化は決っして干渉しないということである．それは，しばしばハイゼンベルグ描像で空間的に離れた場の演算子は可換であると表現される．それに対し，シュレーディンガー描像ではある点における場の変数の変化の影響は，その点に対し空間的領域の場の変数のみに依存する密度行列（時間的領域の場の変数については全て積分してしまったもの）には現れないと表現される．後者の表現が，前者のそれと少なくとも同等であることは確かであるが，より広い概念であるかどうかは現在検討中である．また，外場 J との相互作用を別の形（例えば，$J\delta^4(x)\phi^2(x)$，$J\delta^4(x)\phi^3(x)$，…など）としても，シュレーディンガー描像の因果律の表現が成立するかどうか（つまり，$\rho[\tilde{\phi}_s{}^b,\phi_s{}^b]$ が J に依らないかどうか）という問題も残されている．

ここでは，詳しくは述べなかったが終状態の波動汎関数自体の J 依存性は非常に複雑である．もともと，波動関数自体の物理的意味はあまりよく理解されていないので，その J 依存性がどんな情報を含んでいるかはよくわからない．今後は，波動関数のレベルで J 依存性がどんな意味を持っているのか調べる必要があるだろう．（例えば，波動関数の位相の J 依存性の意味など）

また，依然として相対論的量子拡散の空間的領域への浸み出しの問題が残されている．初期状態が非局所的操作から作られたためという理由で全てが解決したという考えは，やや疑問が残る．このことについては，まだ十分勉強していないので興味のある方々には是非御意見を伺いたいと思います．

参 考 文 献

1) C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980)
2) 森田繁一，宇田川銈久，一松信：「岩波数学公式Ⅲ」，(岩波書店)
3) R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integral* (McGraw-Hill, New York, 1965)
4) 吉川圭二，崎田文二;「経路積分による多自由度の量子力学」(岩波書店) 1986